

公理化方法构建象棋博弈理论体系 ——兼论中国象棋人工智能研究的新方向

张国涵

摘 要：数学公理化方法是指导人类进行科学研究的重要方法，是分析自然、社会乃至人类自身的重要科学工具。象棋本质上是一种依靠逻辑推理进行的二人零和博弈。本文希望通过经典的马擒单士残局为例，用公理化方法构建象棋博弈的理论体系，为中国象棋云库建设乃至大数据计算中人工智能研究提供一个新的方向。

关键词：数学公理化；马擒单士；中国象棋云库

Abstract: The axiomatic method plays an important role in scientific research. Essentially, Xiangqi is a logical two-person zero-sum game. We show a axiomatic method in Xiangqi by the example K-A(one knight vs one adviser) end-game. We hope to give a new direction of the development of Xiangqi and even in AI research based on big data..

Key word: Axiomatic method;K-A endgame, chessdb

一、引言

象棋作为一种至少在北宋就已定型的二人零和博弈，至今在全世界已经有相当多的爱好者。下好象棋的基础是严谨的逻辑和精确的计算，这一点不仅契合了数学研究的基本理念，而且也是现代人工智能不断追求的目标之一。

数学作为推动着人类发展历史最为悠久的学科之一，不仅体现在具体的数学计算上，更体现在数学的思维方法对于整个科学体系的构建上。最经典的莫过于成书于两千多年的《几何原本》，作者欧几里得提出了“由任意一点到另外一点可以画直线”等一系列平面几何公理[1]，演绎推导出一系列结论，形成了整个经

典几何学体系，为人类提供了一种超越几何学的行之有效的解读这个复杂世界诸般规律的方式。

为使读者更容易理解这一理论体系，这里简单叙述如下：
欧几里得体系内最基础的逻辑前提为公理（axiom）和公设（postulation）。公理是基于实践经验人们普遍确信的简单结论。例如，“等量加等量和相等”。公设是对于定义研究对象的存在条件关系不证自明的确认。例如，研究三角形外角与内角的关系，那就需要应用一些公理。欧几里得提出了若干条基础的公设，如“过直线外给定一点，有且仅有一条直线与给定直线平行”，“两条平行直线与第三条直线相交，内错角相等”，如下图 1，其中的 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 就称为内错角。（欧几里得原文意译并非如此，本叙述参照国内现行的初中教材）。

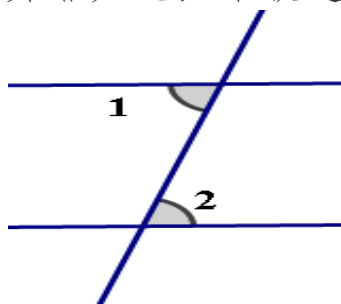


图 1 平行线与内错角

基于此公设，我们应用公理可以证明三角形内角和定理（theorem）。

其命题是：三角形三个内角之和等于一个平角，即一百八十度。

证明：如图 2 所示，对于三角形 $\triangle ABC$ ，过A做直线PQ平行于边AB，

由前面公设可知：AB这条直线存在。依据内错角相等的公理，

可以得到图 2 有： $\angle 1 = \angle B$ ， $\angle 2 = \angle C$

由平角定义： $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

应用公理：等量加等量和相等，可以得到： $\angle A + \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

命题得证。

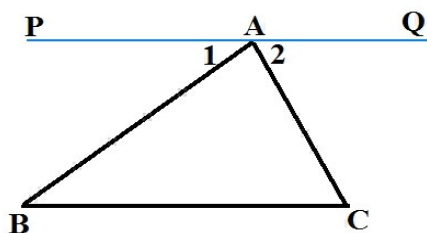


图2 三角形内角和的证明

基于这个定理我们还可以得到推论（corollary）：三角形任意角的外角等于另外两个内角和。

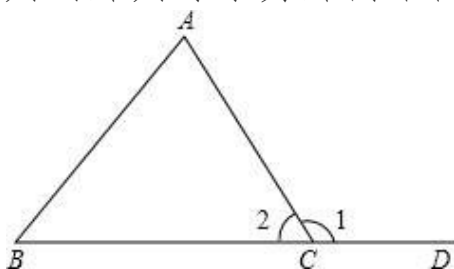


图3 三角形外角等于另外内角之和的证明

证明：如图3，点D为BC延长线上的一点，

那么， $\angle 1$ 就是 $\angle ACB$ 的外角

所以， $\angle 1 + \angle ACB = 180^\circ$

由前述定理，可得： $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$

因此，可以得到： $\angle A + \angle B = \angle 1$

上述推论得证。

以上的证明过程，是由基本公设出发，仅仅运用公理，一步一步按照严格的演绎推理，将三角形角度关系问题的证明按照逻辑推导而成。这样做的好处就是确保逻辑的缜密，同时也使得逻辑思维的步骤更加可视化，从而更容易为人类接受学习掌握。

近代科学家牛顿的《自然哲学之数学原理》在定义了“物质的量”、“运动的量”、“物质固有的力”等8个概念后，也提出“绝对的、真实和和数学的时间，由其特性决定，自身均匀的流逝”等四个公设[2]以此构建了物理学基础。冯诺依曼与摩根斯特恩的《博弈论与经济行为》中用数学公理化方法改变“数学工具也很少被用用的恰当”“或者被用用的不够”[3]，并且据此提出了博弈论乃至整个微观经济学领域的理论基础。所以，不论是自然科学还是社会科学领域，都可以通过此种方式进行科学研究。其中，公理化研究的突出特点是：在公设前提下，只

“需要通过严格的应用公理，并不假定任何别的事情”，即使“看起来很显然的法则”，也需要“严格的证明”[4]，而不是依靠大数据或经验的积累。这样，为人工智能技术快速发展提供一个新的方向：按照公理化演绎方法，进行数理逻辑运算。与目前主要源于神经网络、价格低廉的芯片以及大数据这三个元素的融合相比，可以把人工智能的深度学习能力推向新的更高层次。更进一步的在具体领域的应用是：通过这种方式，不仅希望有助于计算机辅助训练让人们学习象棋更加有章可循，也有助于机器深度学习中，从“维优化变量”的选择及“变量相关性判定”，到“泛化误差上下界”、“稳定性”“一致性”和“收敛率”等，也都有“理”可依，而非依靠数据和经验的“概率”选择。

早期的象棋残局的研究中，贾题韬创造性地提出了“形”的概念，将象棋中的局面，特别是残局局面提炼概括为由“复形”向“单形”的转换，而学棋的人，需要以“单形”为基础。大数据时代的到来，高性能的计算大大促进了象棋的研究，特别是残局的研究。在计算机的帮助下，如在线免费的数据库，中国象棋云库 (<https://www.chessdb.cn/query/>) 通过海量而精确的运算，使得人类可以更精确细致的对残局展开深入的研究。2019年，李旭昇在具体地描述了云库对于残局研究的作用，提出了人类如何通过云库的强大计算力提升自己对残局认识的问题[5]。事实上，随着数据的增加，数据库存储的成本也会相应增加。其根本问题是，让数据增加发挥应有的价值：或者把数据作为验证逻辑演绎推导命题的客观事实根据，或者把数据作为验证逻辑演绎推导命题的前提性公理。

本文希望从最基础的单马擒士入手，用数理化的方式，来解读象棋，并希望以此为广大象棋爱好者乃至专业棋手提供一种新的学习掌握象棋基本规律的方式，同时也希望探求一种归类的方式，希望能降低云库这类象棋数据库的存储成本，从而提高计算效率。这种数理化体系则是仿照经典的欧几里得几何，从公理出发，把每一个结论的推导拆解为多个步骤。本文最初的灵感来自于2017年在慕尼黑举办的第14届世界象棋锦标赛第三轮英国黄春龙先胜中国谢靖的实战对局，双方十分罕见的走到了红方单马擒黑方单士的局面。这看似的确是一个非常简单的必胜残局，但

基于简单公理推导的非常复杂，并且提出公设所需要的逻辑思维的深刻性以及批判性相对非常高深，因此，很难讲本残局讲解透彻。现在以一种数理化的方式，解读这样一个残局，并希望抛砖引玉，以此延伸到整个残局领域，促进象棋残局理论体系的完善，也为机器化人工智能发展开辟一个新的领域提供一些有益的启示。

二、理论架构

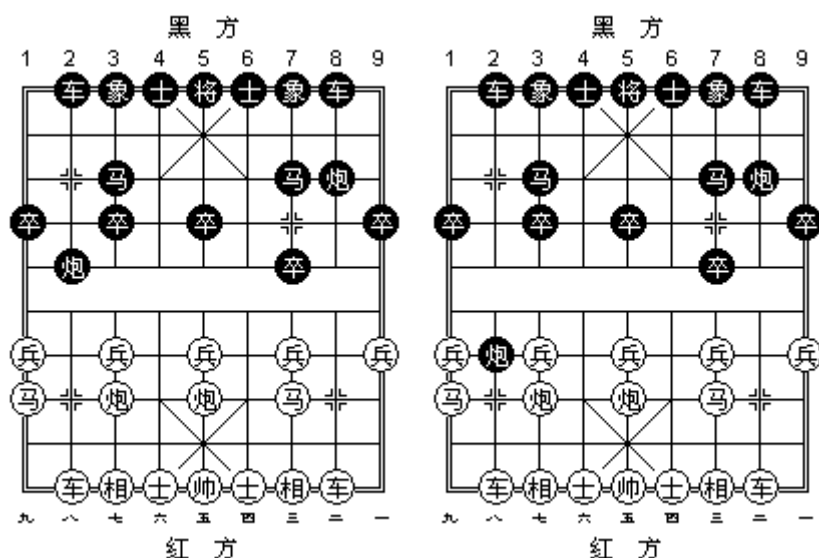
这里我们将象棋基本规则视为理论体系中的公理，譬如，棋子的走法与吃子，胜和的判定。鉴于这些已广为人知，在此不特别列出。需要特别强调的是以下定义：

定义 1：定义双方从开始，到对局结束，任何一方走完一步棋后，棋盘上所有子力及其所在位置共同构成一个局面。

定义 2：当某个残局局面下，一方不存在强迫另一方子力被消耗的手段，则定义此局面为待判残局。

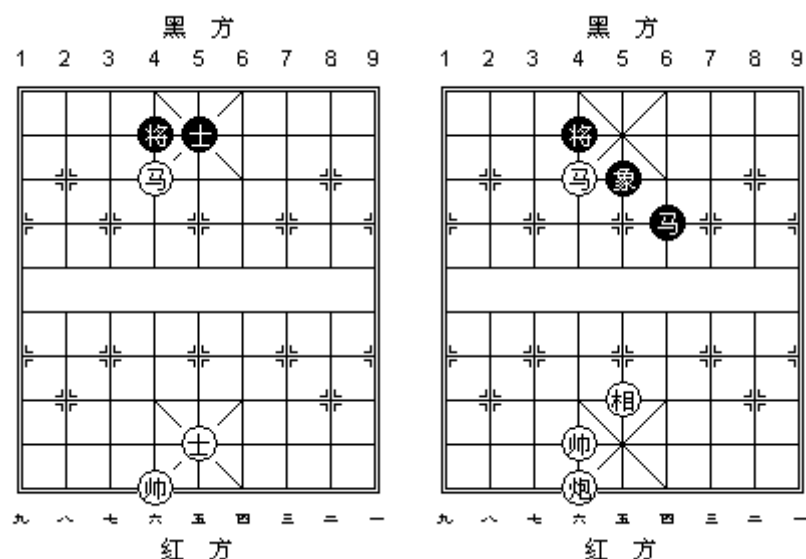
定义 3：某种待判残局下，双方走法都正确所达成的结果，如果有一方获胜，我们称此类待判残局为（例）必胜残局；如果双方均无法获胜，则称此类待判残局为例和残局。

这里有几点需要解释，首先，本文中所有待判局面均为红先。其次，局面是以子力及子力位置共同决定的，这也就是说，子力相同，但若存在至少一个子力位置不同，我们视为不同局面。比如以下两图：

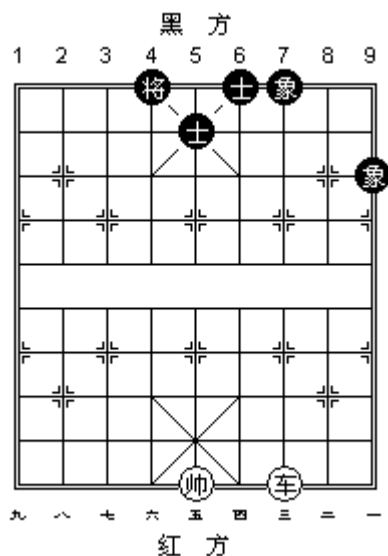


以上两图中，存在黑 2 路炮的位置不同，则此两个局面不同。

待判残局的定义中特别强调劣势一方不存在强迫的手段，如下图所示：



两张图中明显可以看出红方为优势方，但第一张图中不论轮到哪一方行棋，红马都无法避免被黑方吃掉。而第二张图中，虽然红马被黑马吃掉后，红炮会立刻吃回黑马，但以上两个局面均不能称为待判局面。在以上行文中，我们并没有定义优势，劣势，正确招法等概念，其实这也是象棋最难得为人掌握的地方，我们将在结尾详细说明。再有只是将其作为直觉上的感念，而且本文讨论的单马擒士属于优势明显的局面。还有这里的必胜和例和的定义，与一般所见稍有不同，因为这里精确到了每一个待判局面，这样的好处和坏处都是精确，精确使得更具体，但也不够概括。比如，常识中单车和士象全，但精确到如下图待判局面则是红方先走必胜：



上图是一个很基础的巧胜盘面，为了论文的完整性，具体招法将在附录中给出。

基于以上公设和公理，我们给出如下三个引理：

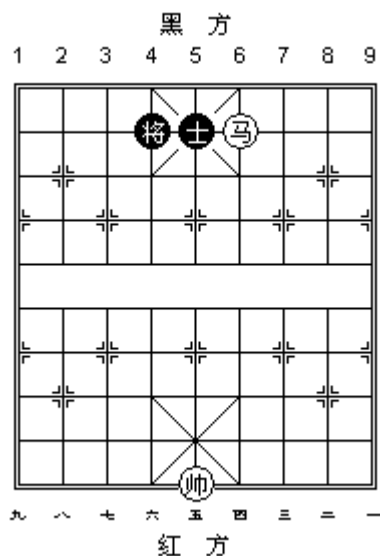
引理 1：马在没有阻挡的情况下可以走到棋盘任何位置。

证明：见附录

引理 2：一方剩下至少一马一帅而另一方剩下一个将的局面的判定为一马一帅方必胜。为了方便，我们把称一马一帅的优势方记为红方，而在表述时把红帅和黑将略去，下同。

证明：由引理 1，以及欠行判负的公理可证，详见附录。

引理 3：在如下轮到红方行棋的待判局面红方必然能吃掉黑士达到引理 2 所对应的待判局面。由于棋盘是对称的，故而，如果把棋子以五路线为对称轴对调结果仍不变，以下不特别做说明。



证明：此时红方可以：

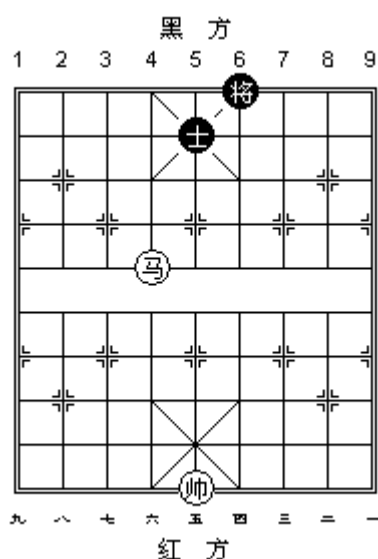
马四退五，由公理（即棋规）可知，黑方必然要应将。如黑方将 4 退 1，则红方马五进七白吃士达到引理 2 局面，证明完成。如黑方将 4 进 1，以下证明过程类似，故只列出招法，不详细解释。

马五进三，士 5 进 4，马三退四，士 6 退 5，马四进六，士 5 退 6，马六进八，士 6 退 5，马八进七，将 4 退 1，马七退五，白吃黑士。这个过程曾被人总结为“四五四六八七”。

于是我们有如下定理：

定理 1（单马必擒单士）：在所有红方至少一马对黑方单士待判局面中，红方必然能白吃黑士到达引理 2 所描述的局面，从而获得胜利。

证明：由引理 1 和实践验证，我们可知所有这种待判局面，至少都能形成如下这类轮到红方行棋，而黑方两个子位置不限的待判局面（在此由于证明过程冗长却很简单，故而略去）。



黑方两种子力一共有 23 种 ($C(9,2)-5-4-4$) 可能的组合，由引理 3，我们只需证明这个待判局面下，红方可以到达引理 3 局面且轮到红方行棋或者可以在这之前白吃士即可。这里只讲解如图这种最复杂的情况。

马六进四，黑方如士 5 进 6，则红马四退二，黑方只能将 6 进 1，红马二进三，必吃黑士。故黑只能士 5 退 4。以下同前例，只列出最复杂的招法，中间解释类似。

马四退二，将 6 进 1，马二进三，将 6 进 1，马三进四，将 6 退 1，马四退六，士 4 进 5. 到达引理 3 对称局面，且轮到红方行棋。证毕。

那么基于以上思路，我们可以对于其他残局也进行类似分析，如前文所提到的单车巧胜仕相全一局。

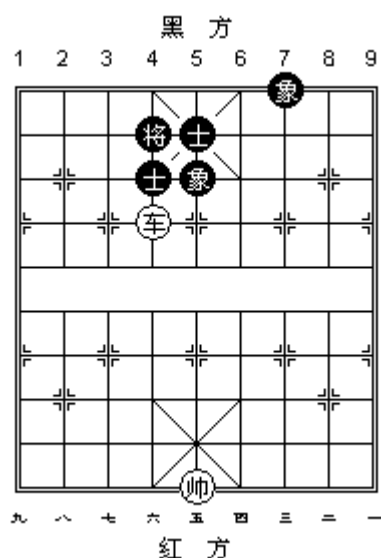
例 1：单车巧胜士象全的招法。

首先，我们还是从简单局面入手。

引理 1*：在待判残局下，单车对双士单象或双象单士必胜，自然，单车对更少的防守子力也同样必胜。

证明：本引理是象棋中非常基础的概念，具体细节见附录。

引理 2*：对于单车吊住肋道高士，且将门无象防守的待判局面（如下图），红方可白吃一士，从而转换成单车对双象单士的局面。



证明：具体招法如下：

车六平八 将 4 退 1

如改走士 5 进 6，则车八进二，将 4 退 1，帅五平六，将 4 平 5，车八进一，将 5 进 1，车八平六，红同样得士。如黑方改走其他招法，则基本变化与主变类似。

2. 车八进三 将 4 进 1

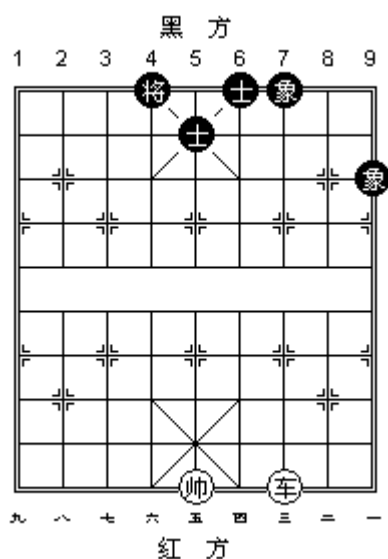
3. 帅五平六 士 5 进 6

4. 车八退二 士 6 退 5

5. 车八进一，将 4 退 1，

6 车八平五 得士。

那么，基于上图结论，我们在分析下图局面时就可以相对简化。



如上图，因黑方士象集中一侧，黑方将门处无象遮挡，故红方有利用机会

车三进七 将4平5

如改走将4进1，则车三平九，将4退1，车九进二，将4进1，车九退四招法同主变类似。

2. 车三平七 将5平4

3. 车七进二 将4进1

4. 车七退四 将4退1

5. 车七平五 将4进1

如改走将4平5，则红可帅五平六，以下黑只能白丢象，形成引理1*所述局面。

6. 车五平六 士5进4

至此就形成了引理2*所述车吊高士盘面。

7. 帅五平六 士6进5

8. 车六平七 将4退1

9. 车七进四 将4进1

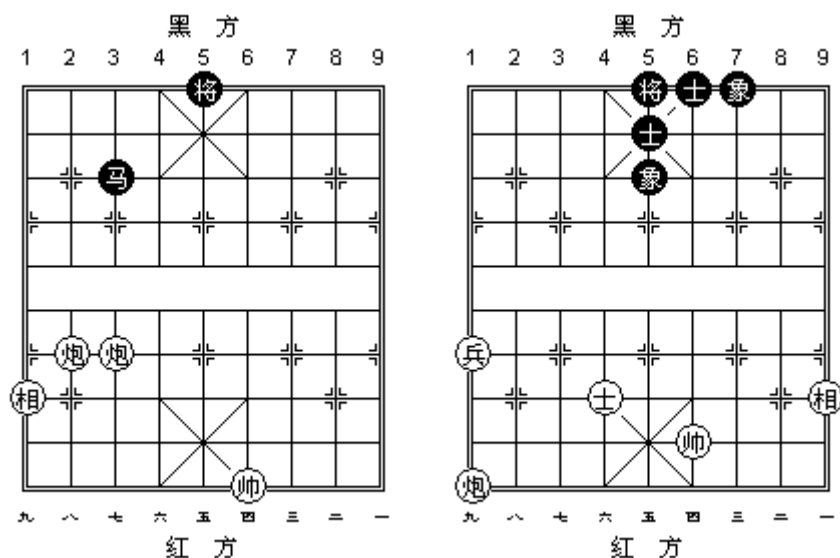
10. 车七退一 将4退1

11. 车七平五红得士必胜。

三、结语

本文将所有单马对单士待判局面的取胜过程拆分为定理 1 和引理 3，其本质思想其实就是象棋棋手的一般思考过程，博弈论中将这种由最后一个局面逆向推导到“初始结”求解动态博弈的方法称为“逆向归纳法”（backward induction）[6]。本文中的三个定义，不仅适用于单马对单士这样简单的残局，作者亦希望这种定义对未来象棋整体，包括开局中局残局的公理化提供参考。其实，在数学中也有类似的研究，即如何通过或者说让计算机证明数学定理，以已故中科院院士吴文俊为代表的一批数学家，在这方面曾做出了卓有成就的探索，并且已经证明了“像 Simson 线那样不算简单的定理”和“初等微分几何中主要的一类定理”[7]。当今软件的计算已经达到顶尖高手的水平，故而这种公理化方式对棋手计算力的提升意义就已经不是很大，但却可以作为一般爱好者学习象棋的模板，甚至可以成为象棋爱好者理解数学的一个极佳的例子。因为即便在当下大数据时代，计算机仍然很难穷尽所有可能的变化。这种公理框架的解构手法，为计算机更好的解读象棋，提供了一种可行的思路。所以，本方法可以作为数理逻辑运算应用于人工智能深度学习，可以作为一种数学家思维方式的训练，也可以为大数据分析创立科学的假说，提高应用大数据进行研究的科学性和有效性。

针对有学者提出的“通过云库的强大计算力提升自己对残局认识”的问题，（从而使得象棋残局的规律能够更好的被人掌握）本文特别强调的是：（但即便是本文所述的方法，在面对复杂的局面残局时，人类仍然很难凭借记忆力和逻辑思考掌握残局的取胜之道。需要指出的是，）这里的复杂不仅是取决于子力的多少，同时也取决于双方子力的对比。在云库意义的某些必胜残局中，防守方的一个马相比于士象全能够对进攻方组形产生更多的干扰，从而使得获胜的难度和需要的招法都大大增加。如果防守方过河子力进一步增加，哪怕是增加一个卒，虽然进攻方的必胜的结论不变，但招法的数量又会大大增加。而对于进攻方，即便是士象的增减，也有可能使局面的取胜难度增大。以下两个图是作者在实战中曾经遭遇的残局。

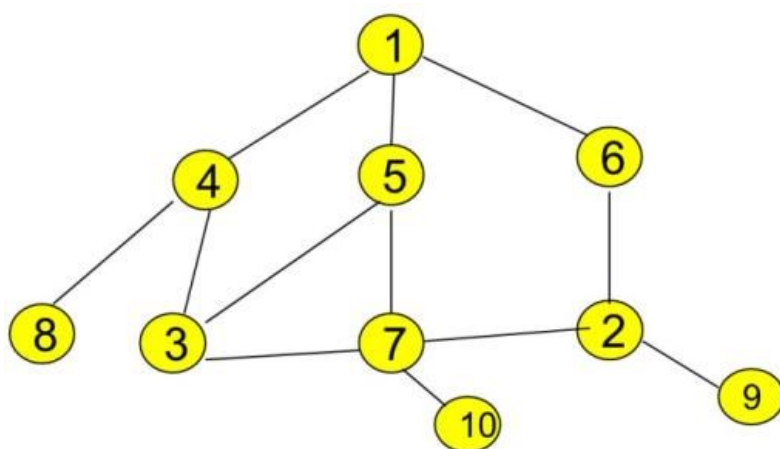


左图中，黑方防守子力虽然只有一马，但由于红方没有士且是单相，需要时时防守黑马捉相以及叫将抽炮，使得获胜难度加大。而对于右图，早先的残局研究认为，炮高兵单缺仕必胜士象全。在中，特级大师王嘉良详细阐释了这一过程[8]，并在招法中体现了双相在中间几个关键节点的作用[9]。招法虽然复杂，但长度大约需要 20-30 回合。但云库的研究表明，即便是红方为单士相，即红方减少一相后，结论仍是必胜。但招法的长度达到了将近 100 回合，具体招法我们将在附录中给出。

还有一些技术问题，比如，如何定义走法为正确？一个简单的解释是：胜要速胜，负要迟负。比如优劣的判定。这其实也就是象棋最难也最吸引人的地方之一。解决这个问题，有两方面困难，一方面，在子力较多的复杂局面下，由于很多时候距离终盘还需要很多步数，我们很难比较出两种走法后形成的盘面究竟何种更好，这也就基本等价于在此这个盘面下，我们无法判定红黑的优劣。一个很直观的问题就是红方起手是中炮更好，还是飞相更好，抑或是仙人指路，过宫炮，跳马？即便是强大的软件，也需要借助开局库完成这样一个筛选过程。而另一个方面，也是跟残局相关的，就是子力价值的浮动问题使得我们不能单纯的通过子力价值的单纯加总来判定优劣，比如三仙炼丹即三高兵对士象全的局面下，按照一般的赋值方法，红方三个兵的价值加总会略低于士象全，但结论却是必胜。再比如，单炮不能赢单将，单马却可以（引理 1）。但存在单车和炮双士的局面，而单车必胜马

双士。马炮价值孰高孰低这里很难量化。棋手则可通过自己的经验计算能力在具体的局面下解答以上两个问题。而软件通过子力极其对应位置的加权求和以及相应的算法，可以在中局给出接近甚至超越顶尖象棋高手的解答，但到了残局阶段，依然要依靠残局库来弥补自身算法的不足。这应当也是未来需要更进一步细化的问题。

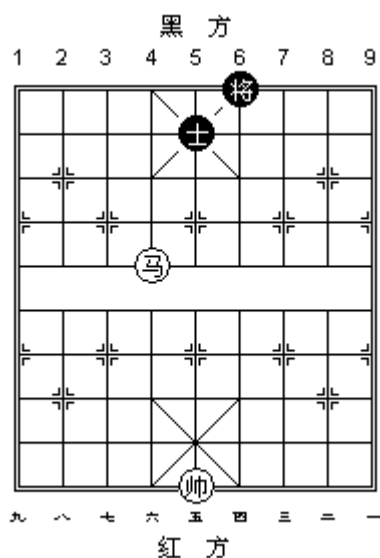
未来，我们还可以引入图论的想法，将局面之间的关系更精确的描述。我们可以把每一个局面（不一定是待判局面）看作一个顶点（node/vertex），而局面之间的招法看作是边（edge）。一个局面下可行招法个数即为顶点度，如图：



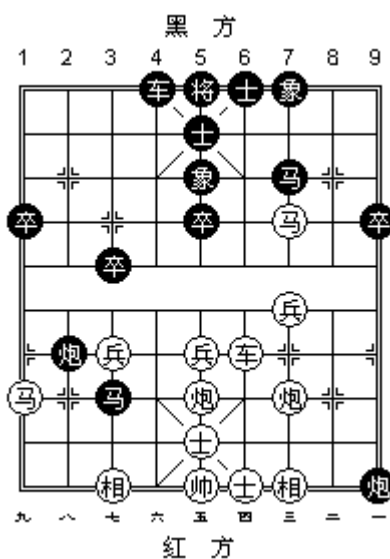
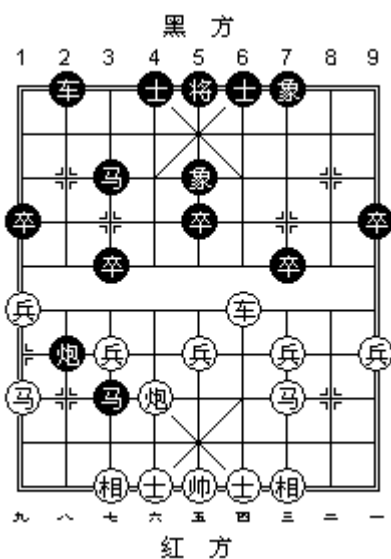
（图片来源：

http://blog.sina.com.cn/s/blog_5e8a23f90102vrtp.html）

比如，我们可以将下图看作顶点 1，此时红方马六进四到达顶点 4，马六进五到达顶点 5，在下图局面下，轮到红方行棋，可行招法共有 10 种（马有 8 个可行走法，帅有 2 个），故而顶点 1 的顶点度会是 10，还需要再加上 7 个顶点。诸如此类。这样做的好处是，我们可以更加清晰的看到局面之间的联系。更进一步，如果局面之间的变化出现了子力变化，即吃子，则可以用有向图来表示。这完全可以再写一篇论文，在此不过多展开。



基于前述理论，一个更有野心的想法是，结合心理学，认知科学等学科，对棋手在行棋过程中的盲点展开研究。不论水平高低，棋手在对局中受限于计算力惯性思维或其他条件，都不可避免出现盲点。如下两图都轮到黑方行棋：



左图是 1996 年全国个人赛甲组，许银川先和陶汉明的对局[12]，右图是 2015 年韩信杯预选赛英国黄春龙先负英国张国涵的对局。

两盘棋虽然相隔甚远，但两位执红的棋手都出现了盲点。基于马封边必亡的惯性思维，都忽略了黑马跳边路的手段，导致被黑方走出马 3 进 1 后局面亏损严重。两盘棋的详细招法我们将在附录中给出。可见，棋手的盲点是具有一定普遍性的。对盲点的研究，更加回归到人本身而非就棋论棋，可以帮助棋手更有效

的完善技术，同时更有针对性的研究对手。更进一步，我们对于所谓棋风也可以进一步的量化认识，而不是停留在细腻凶狠这些形容词本身。当然这就需要认知科学等学科共同的研究。

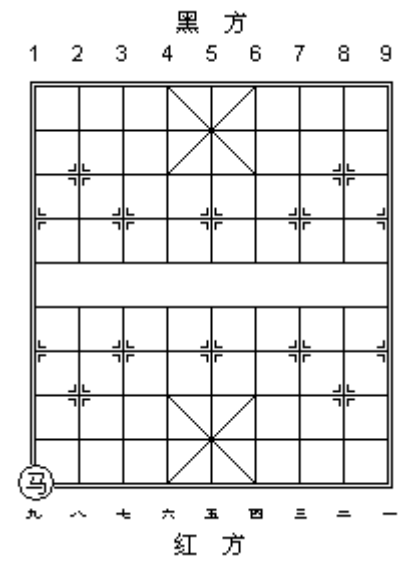
总之，在新的时代，虽然有高新技术手段的支持，仍然需要人的逻辑思维和创造性思维进行科学化的研究。即使对于象棋的研究，仍然还有相当大的研究空间，不仅是职业棋手，其他象棋爱好者也同样可以通过象棋提升自己，完善自己，从而实现象棋运动的独特价值。

致谢：本文作者诚挚感谢博士生导师伯明翰大学 S. Z. Németh 博士以及博士后导师中国科学院数学与系统科学研究院计算数学所袁亚湘院士在学术乃至人生道路上给予的毫无保留的帮助。感谢南开大学商思源教授一直以来的教导。感谢国际特级大师黄春龙先生一直以来的照顾和帮助。感谢李旭昇先生，薛涵第先生对本文技术上的支持与讨论。感谢薛忠先生和欧洲象棋联合会的帮助和支持。

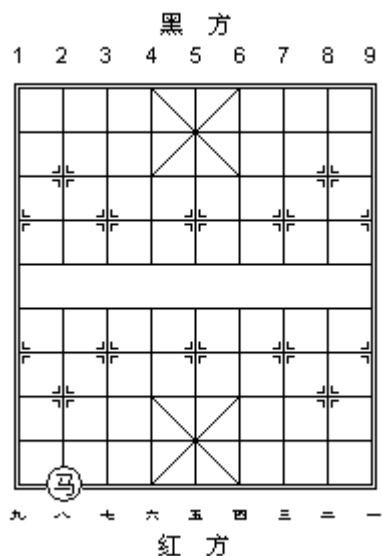
四、附录

引理 1：马在没有阻挡的情况下可以走到棋盘任何位置。

证明：从最极端的情况的开始，假设马处于棋盘的角上，如图：



在不考虑重复的情况下，我们可以让马通过三步位移一格，即马九进八，马八退六，马六退八，至如下图所示：



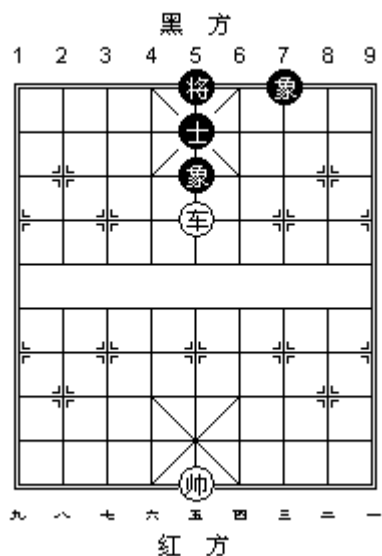
红马三步之后相当于挪动一格，把这个过程至多重复 89 次，就可以将整个棋盘遍历。

注：其实这个问题可以进一步加强为“马是否可以不重复的遍历棋盘上所有点”。这个问题本质上等价于图论中的哈密顿回路问题。通过将棋盘基于马的走法转化为图论中的简单图，我们也可以得出肯定的结论，即，马可以不重复的遍历棋盘上所有点。

引理 1*：在待判残局下，单车对双士单象或双象单士必胜，自然，单车对更少的防守子力也同样必胜。

证明：这些残局的情况看似复杂，但只要掌握几个典型局面其他都可类推。

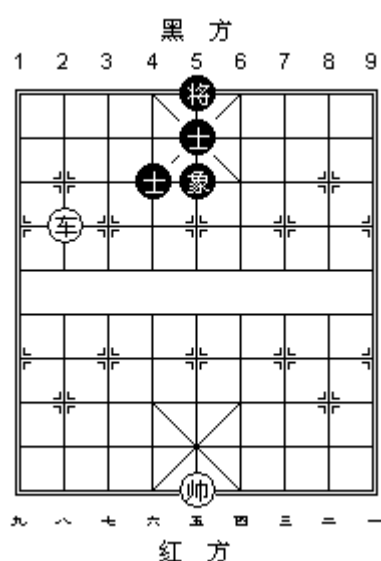
先说明单缺仕情况，如下图即为单车对单缺仕的典型局面：



招法如下：

1. 车五平八，象 5 退 3
2. 车八平三，象 7 进 5
3. 车三进二，象 3 进 1
4. 车三平一，象 1 退 3
5. 车一进一，士 5 退 6
6. 帅五平四，象 3 进 1
7. 车一平四 红得士进入单车对双象盘面。

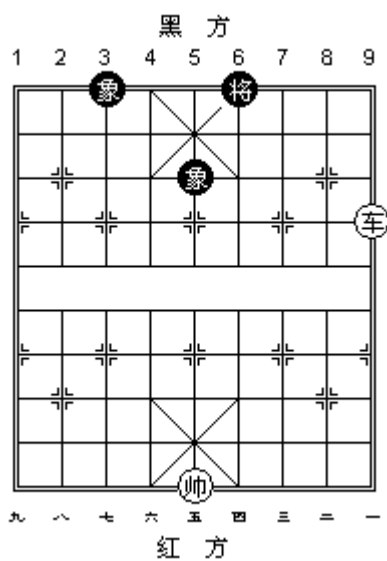
我们再来说明单车对单缺象盘面，如下图：



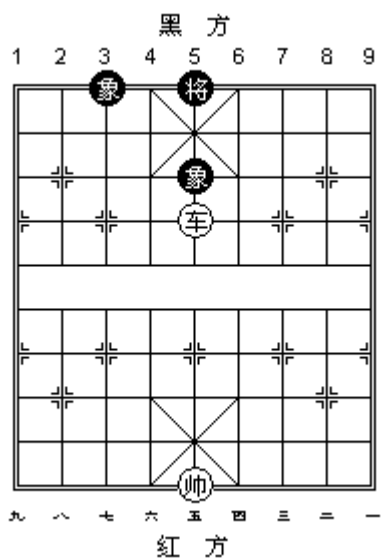
1. 车八进三，士 5 退 4
2. 车八平七，士 4 退 5
3. 车七退二，象 5 进 7
4. 车七平三，象 7 退 5
5. 车三平五 至此红方白得象，形成单车对双士局面。

这里，单车对单缺象局面，红方的要点就是车占三或七路宫顶线，从而捉死单象。

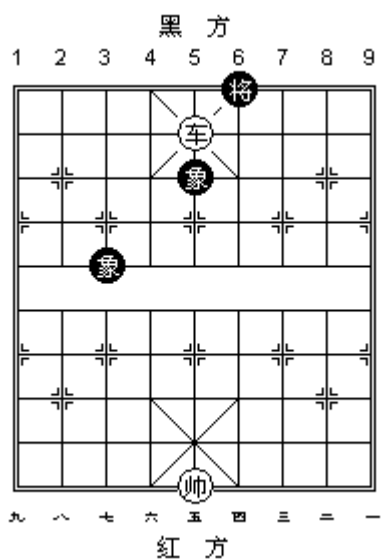
那么以下，我们来看单车对双象局面，其实，基本的思路很直接，就是将车走到黑方花心位置。如果黑将不在中路，如下图



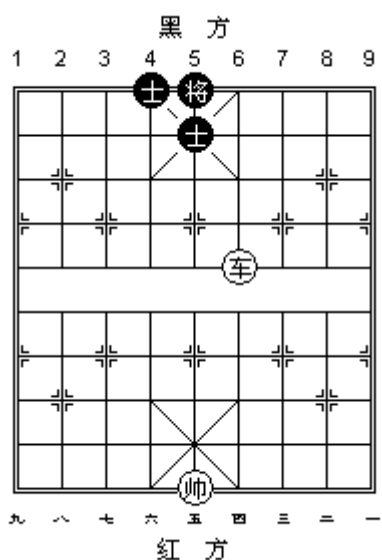
则车一进三，将6进1，车一退一，将6退1，车1平5。如果黑将在中路，如下图，招法如下：



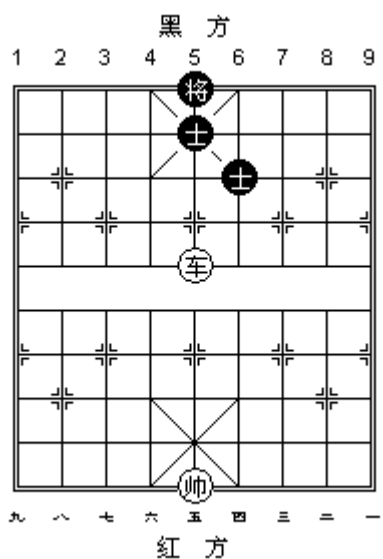
1. 车五平六，象3进1
2. 车六进二，象1进3
3. 车六平九，将5平6
4. 车九平五。至如图局面



4., 象5进7
5. 车五退三, 象7退5
6. 车五平四, 将6平5,
7. 车四平七, 红得象形成单车对车单象。注意, 到车占花心局面时, 若此时轮红方行棋, 红方可走等招帅五进一, 以下同主变。单车胜双士盘面, 一个简单的思路是, 红方首先需占住中路, 如黑方双士一在底线一在中路, 则可如下图直接困毙:



如有高士, 则可形成前述车吊高士局面, 或车占中路宫顶线吃士, 如下图:



1. 车五平六，将 5 平 6

2. 车六平一，将 6 进 1

3. 帅五平四，士 5 进 4

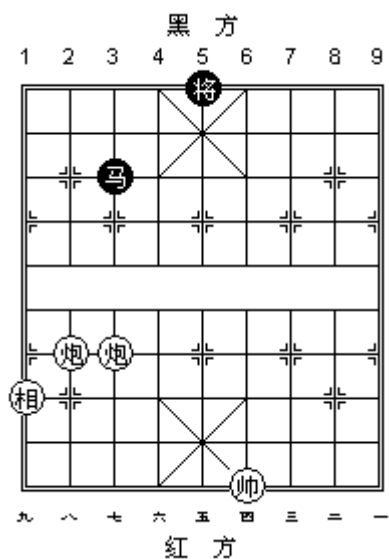
4. 车一进二，将 6 平 5

如士 6 退 5，则车一进一，将 6 退 1，车一平五，困毙

5. 车一平四得士

对于单车对士象或黑方防守子力更少的局面，红方只需帅车占中路，黑方要么被将死要么丢士象，方法与前类似，在此省略。

关于最后一节提到两个残局的胜法



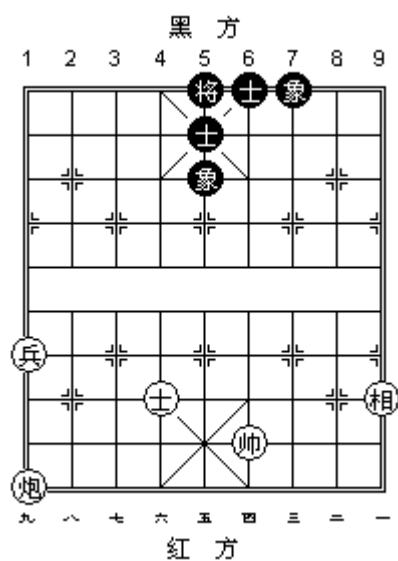
1. 炮七平五 马 3 进 4

2. 炮五退三 马 4 进 6
3. 相九退七 马 6 进 4
4. 炮八平七 马 4 进 6
5. 帅四进一 马 6 退 8
6. 炮七退一 将 5 进 1
7. 炮七平二 将 5 退 1
8. 相七进五 将 5 平 4
9. 相五进三 将 4 平 5
10. 炮五平二 马 8 退 6
11. 后炮平五 马 6 进 7
12. 炮二退一 马 7 退 9
13. 相三退一 将 5 进 1
14. 帅四进一 马 9 进 7
15. 炮二平四 将 5 进 1
16. 炮五进二 马 7 退 9
17. 炮四平一 马 9 退 8
18. 炮五退二 将 5 退 1
19. 炮一平二 将 5 平 4
20. 相一进三 将 4 平 5
21. 炮二进三 马 8 退 6
22. 相三退五 将 5 平 4
23. 帅四退一 将 4 进 1
24. 炮二平六 将 4 退 1
25. 炮五平六 将 4 平 5
26. 后炮平四 马 6 进 8
27. 炮六平二 将 5 平 4
28. 相五进三 将 4 平 5
29. 炮四平二 马 8 退 6
30. 相三退五 将 5 平 4
31. 前炮退二 马 6 进 4
32. 后炮平五 马 4 进 6
33. 相五进三 马 6 进 7
34. 炮二进四 马 7 退 9

- | | | |
|-----|------|---------|
| 35. | 帅四平五 | 马 9 进 7 |
| 36. | 帅五进一 | 马 7 退 6 |
| 37. | 帅五退一 | 马 6 进 4 |
| 38. | 帅五平六 | 将 4 平 5 |
| 39. | 相三退五 | 将 5 平 6 |
| 40. | 炮五平四 | 马 4 进 3 |
| 41. | 炮二平四 | 将 6 平 5 |
| 42. | 后炮平五 | 将 5 平 6 |
| 43. | 相五进七 | 将 6 平 5 |
| 44. | 炮四平五 | 将 5 平 6 |
| 45. | 前炮平七 | 马 3 退 4 |
| 46. | 炮五平六 | 马 4 退 5 |
| 47. | 炮七平一 | 马 5 进 6 |
| 48. | 炮一退四 | 将 6 平 5 |
| 49. | 炮一平五 | 马 6 进 7 |
| 50. | 炮五平三 | 将 5 进 1 |
| 51. | 相七退五 | 马 7 退 9 |
| 52. | 炮六平五 | 将 5 平 6 |
| 53. | 帅六平五 | 马 9 进 7 |
| 54. | 炮五平二 | 将 6 平 5 |
| 55. | 帅五平四 | 将 5 平 4 |
| 56. | 相五进三 | 将 4 平 5 |
| 57. | 炮二平五 | 将 5 平 4 |
| 58. | 炮五进三 | 将 4 平 5 |
| 59. | 炮五退二 | 马 7 进 9 |
| 60. | 相三退五 | 将 5 平 4 |
| 61. | 炮五平八 | 将 4 平 5 |
| 62. | 帅四平五 | 将 5 退 1 |
| 63. | 帅五平六 | 将 5 进 1 |
| 64. | 炮三平四 | 将 5 退 1 |
| 65. | 炮四退二 | 马 9 退 8 |
| 66. | 炮八退一 | 马 8 退 9 |
| 67. | 炮八平五 | 将 5 平 6 |

68. 相五进三 将6平5
69. 炮五进一 马9进8
70. 相三退五 将5平6
71. 帅六退一 马8进9
72. 炮四平二 马9退8
73. 帅六平五 马8退9
74. 炮二平三 马9进8
75. 炮五平二 将6平5
76. 炮三进二 马8退9
77. 炮二平五 将5平6
78. 相五进七 将6平5
79. 炮三平五 将5平6
80. 前炮平一 将6平5
81. 相七退五 将5平6
82. 炮五平一 马9进7
83. 前炮平三 将6平5
84. 炮一平五 将5平4
85. 炮五平三 马7进9
86. 前炮平二 马9退8
87. 相五进三 马8进7
88. 炮二进四 马7退5
89. 炮二平六 将4平5
90. 炮三退一 将5平6
91. 炮三平四 将6平5
92. 帅五进一 将5进1
93. 炮四平五 将5平6
94. 炮五进三 将6平5
95. 炮五进一 将5退1
96. 炮六平八 将5退1
97. 炮五进三 将5进1
98. 炮八进二 将5平6
99. 炮五平六 将6进1
100. 炮六进一

残局 2 炮高兵士相胜士象全



1. 士六退五 象5进3
2. 炮九进一 象3退5
3. 相一进三 象5进3
4. 兵九进一 象3退5
5. 帅四退一 象5进3
6. 帅四平五 将5平4
7. 炮九进二 将4进1
8. 兵九进一 象3退5
9. 兵九平八 将4退1
10. 兵八进一 象5进7
11. 兵八平七 象7退9
12. 兵七平六 象9进7
13. 帅五平六 象7退5
14. 炮九平三 将4平5
15. 兵六平五 士5退4
16. 炮三退三 士6进5
17. 帅六平五 将5平6
18. 兵五平四 士5进4
19. 帅五平四 士4退5
20. 炮三进一 将6平5

21.	兵四平三	士5退6
22.	兵三平二	士4进5
23.	兵二平一	士5进6
24.	士五进六	士6退5
25.	帅四平五	将5平4
26.	帅五平六	士5进6
27.	炮三平六	将4平5
28.	炮六平四	士6进5
29.	炮四平二	象5进3
30.	炮二进八	象7进5
31.	兵一平二	象3退1
32.	相三退五	象5进7
33.	兵二平三	士5退4
34.	帅六平五	象7退5
35.	炮二退七	象5退7
36.	帅五平四	士4进5
37.	相五进七	象7进5
38.	兵三平四	象5退7
39.	炮二进七	象7进5
40.	兵四平五	象1进3
41.	帅四平五	将5平4
42.	帅五平六	象5进7
43.	兵五平四	象7退9
44.	炮二退八	象3退5
45.	兵四平五	象9退7
46.	炮二进八	将4进1
47.	兵五平六	象7进9
48.	相七退九	象9进7
49.	士六退五	将4退1
50.	帅六进一	将4平5
51.	士五进六	士5退4
52.	帅六平五	士6退5
53.	帅五平四	士5进6

54.	兵六平五	象 5 退 3
55.	兵五平四	士 6 退 5
56.	炮二退七	象 7 退 9
57.	兵四平三	象 9 退 7
58.	炮二平五	士 5 退 6
59.	相九进七	将 5 进 1
60.	兵三平四	将 5 退 1
61.	炮五退一	象 3 进 1
62.	帅四退一	象 1 进 3
63.	兵四进一	象 7 进 9
64.	兵四进一	象 3 退 1
65.	炮五平二	象 1 进 3
66.	炮二进八	象 9 退 7
67.	兵四进一	将 5 进 1
68.	兵四平三	将 5 平 4
69.	炮二退一	将 4 进 1
70.	炮二退七	士 4 进 5
71.	炮二平六	将 4 平 5
72.	炮六退一	象 3 退 1
73.	相七退五	象 1 进 3
74.	炮六平五	将 5 平 4
75.	炮五进八	象 3 退 5
76.	相五进七	将 4 退 1
77.	炮五平一	将 4 平 5
78.	士六退五	将 5 退 1
79.	炮一退八	将 5 平 4
80.	兵三平四	将 4 进 1
81.	帅四进一	将 4 进 1
82.	炮一平五	象 5 进 7
83.	帅四进一	象 7 退 5
84.	士五进六	将 4 退 1
85.	帅四平五	将 4 平 5
86.	炮五进七	将 5 平 6

87. 炮五平二 将 6 进 1
88. 士六退五 将 6 退 1
89. 炮二退六 将 6 进 1
90. 炮二平四 将 6 退 1
91. 士五进四

1996 年全国个人赛许银川先和陶汉明[10]:

1. 炮二平五 马 8 进 7
2. 马二进三 车 9 平 8
3. 车一平二 马 2 进 3
4. 马八进九 卒 7 进 1
5. 炮八平七 车 1 平 2
6. 车九平八 炮 2 进 2
7. 车二进六 马 7 进 6
8. 车八进四 象 3 进 5
9. 车八平四 卒 3 进 1
10. 车二退五 炮 8 平 6
11. 车二进八 炮 6 进 3
12. 车二退五 马 6 进 4
13. 车二平四 马 4 进 3
14. 兵九进一 炮 2 进 2
15. 炮五平六 前马进 1
16. 相三进五 炮 2 进 3
17. 车四平八 车 2 进 5
18. 马九进八 卒 3 进 1
19. 马八退九 卒 3 平 4
20. 炮六退一 炮 2 退 2
21. 马三退二 马 3 进 2
22. 炮六平一 马 2 进 3
23. 马二进四 马 3 进 1
24. 相七进九 马 1 退 3
25. 相九退七 炮 2 进 2
26. 兵三进一 卒 7 进 1

27.	相五进三	卒 5 进 1
28.	马四进六	炮 2 退 4
29.	炮一进一	马 3 进 1
30.	相七进九	炮 2 平 7
31.	炮一平五	士 6 进 5
32.	马六退八	炮 7 平 1
33.	炮五进三	炮 1 平 2
34.	炮五平二	炮 2 进 1
35.	兵五进一	炮 2 平 8
36.	兵五进一	卒 4 进 1
37.	兵五平四	卒 9 进 1
38.	士四进五	象 7 进 9
39.	士五进六	炮 8 进 2
40.	炮二退一	炮 8 退 2
41.	炮二平九	炮 8 进 2
42.	炮九平二	士 5 进 6
43.	马八进九	士 4 进 5
44.	士六退五	炮 8 退 1
45.	马九进七	马 1 退 3
46.	相九退七	马 3 退 4
47.	马七进六	将 5 平 4
48.	炮二平五	炮 8 退 3
49.	士五进四	卒 4 平 5
50.	炮五平二	象 9 进 7
51.	兵四进一	马 4 进 2
52.	炮二退三	炮 8 退 3
53.	士六进五	炮 8 平 9
54.	马六退七	卒 5 平 6
55.	炮二平一	炮 9 进 5
56.	炮一进四	炮 9 退 1
57.	马七进八	卒 1 进 1
58.	炮一平二	炮 9 平 8
59.	炮二平一	炮 8 平 9

60.	炮一平二	炮 9 平 8
61.	炮二平一	卒 1 进 1
62.	炮一退四	卒 1 平 2
63.	炮一平四	卒 6 平 7
64.	士五退六	马 2 进 4
65.	炮四平六	将 4 平 5
66.	士四退五	马 4 退 5
67.	兵四平五	炮 8 退 4
68.	马八退六	卒 2 进 1
69.	炮六进三	炮 8 平 6
70.	马六进八	卒 2 平 3
71.	炮六平九	炮 6 平 9
72.	炮九进四	炮 9 进 2
73.	马八进七	将 5 平 6
74.	帅五平四	卒 7 进 1
75.	炮九退三	象 5 进 3
76.	相七进五	卒 3 进 1
77.	炮九退二	马 5 进 3
78.	相五进七	卒 3 进 1
79.	马七退六	将 6 平 5
80.	炮九进二	象 7 退 5
81.	士五进六	卒 3 平 4
82.	炮九退三	卒 7 进 1
83.	炮九退一	卒 4 进 1
84.	士六退五	马 3 进 4
85.	马六退五	炮 9 进 4
86.	马五退六	炮 9 退 6
87.	兵五平四	象 3 退 1
88.	马六进四	卒 7 平 8
89.	马四退六	炮 9 进 7
90.	马六进五	马 4 退 5
91.	炮九平二	炮 9 平 5
92.	马五退三	马 5 退 3

93. 炮二退一

2015 年韩信杯预选赛，英国黄春龙先负英国张国涵

1. 炮二平五 马 2 进 3
2. 马二进三 马 8 进 7
3. 车一平二 车 9 平 8
4. 兵三进一 卒 3 进 1
5. 炮八平七 士 4 进 5
6. 车九进一 马 3 进 2
7. 车二进六 象 3 进 5
8. 马八进九 车 1 平 4
9. 车九平四 炮 8 平 9
10. 车二进三 马 7 退 8
11. 马三进四 马 2 进 1
12. 炮七退一 马 8 进 7
13. 马四进三 炮 9 进 4
14. 车四进二 炮 9 进 3
15. 炮七平三 马 1 进 3
16. 士六进五 炮 2 进 4
17. 炮三进一 马 3 进 1
18. 炮五平六 马 1 进 3
19. 炮六退二 马 3 退 4
20. 士五进六 车 4 进 7
21. 马九退七 炮 2 进 3
22. 帅五进一 车 4 平 7
23. 马七进五 车 7 退 2
24. 马三退四 马 7 进 8
25. 兵五进一 炮 2 退 3
26. 兵七进一 炮 2 平 5
27. 车四平五 车 7 平 6
28. 车五平二 车 6 退 1
29. 兵七进一 车 6 平 3
30. 车二进一 卒 9 进 1

31. 炮六进三 马 8 退 7
32. 炮六平三 马 7 进 6
33. 车二进一 马 6 进 7
34. 车二平七 象 5 进 3
35. 马五进三 炮 9 平 6
36. 马三退五 炮 6 退 7
37. 马五进六 炮 6 平 5
38. 马六进五 象 3 退 1
39. 帅五平六 炮 5 进 3
40. 马五退三 炮 5 平 4
41. 马三进五 炮 4 退 3

参考文献:

1. [古希腊] 欧几里得. 几何原本[M]. 兰纪正, 朱恩宽译. 陕西: 陕西科学技术出版社, 2003: 2.
2. [英] 牛顿. 自然哲学之数学原理 [M]. 王克迪译. 北京: 北京大学出版社, 2006: 1-4.
3. [美] 冯·诺依曼, 摩根斯特恩. 博弈论与经济行为[M]. 王建华, 顾玮译. 北京: 北京大学出版社, 2018: 3.
4. [英] 西蒙·辛格. 费马大定理——一个困惑了世间智者 358 年的谜[M]. 薛密译. 上海: 上海译文出版社, 2005: 269.
5. 李旭昇. 象棋残局库在残局理论与排局创作中的应用[C]. 2019 棋文化峰会征文., 杭州, 2019.
6. 张维迎. 博弈论与信息经济学[M]. 上海: 上海人民出版社, 1996: 168-169
7. 吴文俊. 数学机械化[M]. 北京: 科学出版社, 2003: iii.
8. 王嘉良. 炮高兵单缺仕对士象全的胜法(一)[J]. 棋艺. 哈尔滨: 当代体育杂志社, 2004 (3): 43.
9. 王嘉良. 炮高兵单缺仕对士象全的胜法(二)[J]. 棋艺. 哈尔滨: 当代体育杂志社, 2004 (4): 45.
10. 许银川. 银川棋路[M]. 上海: 上海人民出版社, 2011: 175-182

作者简介: 张国涵, 象棋国际大师。2011 年本科毕业于南开大学经济学院金融系, 2012 年至 2017 年就读于英国伯明翰大学管理数学专业, 获博士学位, 研究方向为最优化理论与算法。2017 年至 2019 年在中国科学院数学与系统科学研究院从事博士后研究, 合作导师为袁亚湘院士。现为北京邮电大学理学院数学系讲师。张国涵就读南开大学期间, 为象棋队成员, 受教于南开大学商思源教授, 并参与组织了“西南联大杯”北大清华南开三校象棋对抗赛, 天津市高校赛等比赛。留学英国期间, 作为英国队成员参加包括世锦赛, 欧锦赛, 韩信杯预选赛等诸多赛事。2017 年获世锦赛第 14 名, 2014 年欧锦赛亚军。2015-2017 年三届爱尔兰孔子学院杯公开赛裁判长。2020 年

疫情期间，参加“出棋制胜”2020 年全国象棋专业 vs 业余让先挑战赛，作为业余队最后上场与郑惟桐特大交手。